

Плоская рама: собственные колебания и устойчивость (МКЭ)

Стальная рамная конструкция — два пролёта по 6,0 м, два этажа по 3,6 м, колонны жёстко заземлены в фундаментах. Определены шесть первых собственных частот и форм колебаний и три первых критических коэффициента нагрузки в линейаризованной постановке. Расчёт выполнен собственной МКЭ-программой; результаты проверены по аналитическим решениям и на сходимость сетки.

ОБЪЕКТ	Плоская стальная рама 2 × 2 (концепт, не проект заказчика)	ДАТА	октябрь 2026
ВИДЫ РАСЧЁТА	Модальный анализ · линейаризованный расчёт на устойчивость	ЛИСТОВ	6
МЕТОД	МКЭ, стержневые КЭ Эйлера–Бернулли, 3 степени свободы в узле	ИСПОЛНИТЕЛЬ	Игорь Туркин
ПРОГРАММА	Собственный код: Python 3.13 · NumPy · SciPy (LAPACK)	САЙТ	turkinpro.ru

2,184 Гц f_1 — основная собственная частота	0,458 с T_1 — период основного тона	52,79 λ_1 — критический коэффициент нагрузки	0,00135 % макс. расхождение с аналитикой
--	--	---	--

1 Исходные данные

Параметр	Обозн.	Значение
Геометрия и связи		
Пролёты	l	2 × 6,0 м
Высота этажей	h	2 × 3,6 м (отм. +3,600; +7,200)
Опоры колонн · узлы рамы	—	жёсткая заделка · жёсткие (рамные)
Материал		
Сталь (ГОСТ 27772-2015)	—	C255
Модуль упругости	E	2,06 · 10 ⁵ МПа
Плотность	ρ	7850 кг/м ³
Сечения (СТО АСЧМ 20-93 / ГОСТ Р 57837-2017)		
Стойки — двутавр колонный	30K1	$A = 108,0 \text{ см}^2$, $I_x = 18\,110 \text{ см}^4$, 84,8 кг/м
Ригели — двутавр балочный	35Б1	$A = 49,53 \text{ см}^2$, $I_x = 10\,060 \text{ см}^4$, 38,9 кг/м
Массы (модальный анализ)		
Присоединённая масса перекрытия, +3,600	m_1	2000 кг/м
Присоединённая масса покрытия, +7,200	m_2	1500 кг/м
Собственная масса проката	ρA	учтена в матрице масс; всего модель — 44,76 т
Нагрузки (расчёт на устойчивость)		
Расчётная нагрузка на ригели перекрытия	q_1	40 кН/м
Расчётная нагрузка на ригели покрытия	q_2	30 кН/м
Конечно-элементная модель		
Разбиение стержней	—	10 КЭ на каждый из 10 стержней
Узлы · элементы · степени свободы	—	99 · 100 · 297 (свободных 288)

2 Расчётная схема

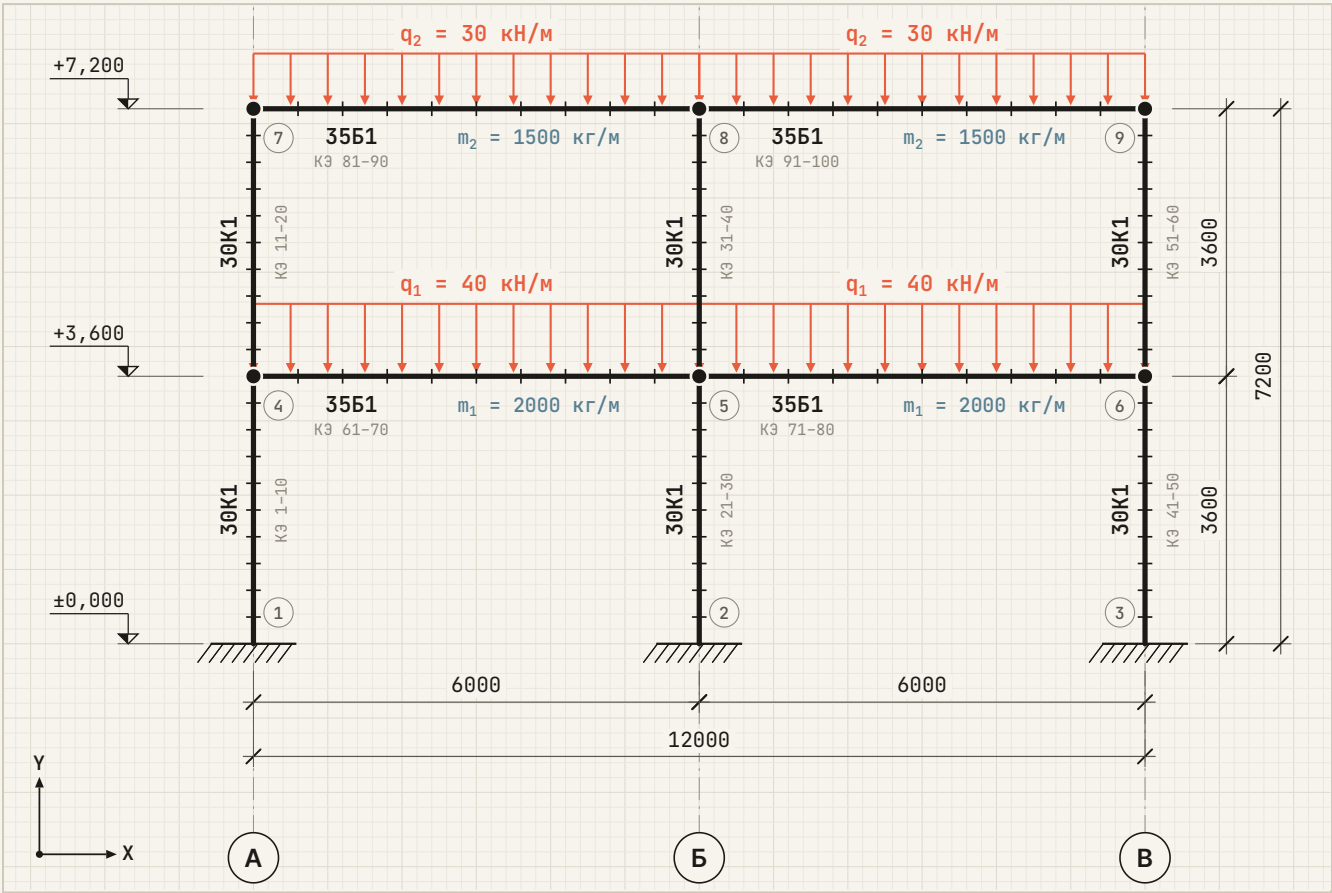


Рис. 1. Расчётная схема рамы: узлы 1–9, номера КЭ по стержням, сечения, расчётные нагрузки q и присоединённые массы m . Размеры — в мм, отметки — в м.

2.1 Дискретизация

Каждый стержень разбит на 10 равных конечных элементов: 0,36 м в стойках и 0,60 м в ригелях. В узле три степени свободы — горизонтальное u , вертикальное v перемещения и поворот θ . Опорные узлы 1–3 закреплены полностью, поэтому из 297 степеней свободы свободными остаются 288.

Матрица масс — согласованная: учитывает массу проката ρA и присоединённую массу перекрытий. Распределённые нагрузки q приводятся к узлам эквивалентными силами и моментами.

2.2 Контроль модели

Масса модели	44 764 кг
Σ вертикальных реакций	840,00 кН
$\Sigma q \cdot l$ (приложено)	840,00 кН
Σ горизонтальных реакций	0,00 кН
Макс. прогиб ригеля от q	7,78 мм (1/772)
Продольная сила в стойке К1-Б	-434,4 кН

Равновесие выполняется до машинной точности: сумма реакций равна приложенной нагрузке.

2.3 Сечения: сортамент и проверка по геометрии

Профиль	$h \times b \times t_w \times t_f$, мм	r , мм	A , см ²	$A_{\text{геом}}$, см ²	I_x , см ⁴	$I_{x,\text{геом}}$, см ⁴
30K1	296 × 300 × 9 × 13,5	18	108,00	107,99 (-0,01 %)	18 110	18 107 (-0,02 %)
3551	346 × 155 × 6,2 × 8,5	18	49,53	49,53 (0,00 %)	10 060	10 062 (+0,02 %)

В расчёте приняты табличные A и I_x (СТО АСЧМ 20-93). Контрольные значения вычислены по размерам сечения с учётом радиусов скругления r : стенка, полки и четыре галтели (функция `i_section_props` в `fem.py`); расхождение с сортаментом не превышает 0,02 %.

3 Методика расчёта

3.1 Конечный элемент

Стержень длиной l моделируется элементом Эйлера–Бернулли: продольные перемещения аппроксимируются линейно, прогибы — кубическими полиномами Эрмита. Матрицы записаны в местных осях для вектора $(u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$.

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{m}_e = \frac{\bar{m} l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{k}_G = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\bar{m} = \rho A + m_{\text{add}}$ — погонная масса (прокат + присоединённая масса), N — продольная сила в элементе (растяжение +). Матрица (3) получена из тех же функций формы, что и (1).

3.2 Сборка

Матрицы элементов переводятся в общие оси и суммируются по узлам ($\mathbf{a}_e$ — матрица индексов степеней свободы элемента); аналогично собираются $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}_G$.

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{a}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{a}_e, \quad \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3.3 Собственные колебания

Обобщённая симметричная задача на собственные значения решается плотным методом LAPACK (scipy.linalg.eigh); формы нормируются по массе. Доля массы, вовлечённая формой i в движение по направлению r , — эффективная модальная масса.

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0}, \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad T_i = \frac{1}{f_i} \quad (5) \quad M_{\text{eff},i}^{(r)} = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i} \quad (6)$$

3.4 Устойчивость

Сначала выполняется линейный статический расчёт на нагрузки q ; по концевым усилиям элементов определяются продольные силы N . Затем решается линеаризованная задача устойчивости; так как $\mathbf{K}_G$ знаконеопределённа, она приводится к виду с положительно определённой $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e^q, \quad N_e = f_{e,4} \quad (7)$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_G(N)) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \iff -\mathbf{K}_G \boldsymbol{\varphi} = \kappa \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}, \quad \lambda = \frac{1}{\kappa} \quad (\kappa > 0) \quad (8)$$

Коэффициенты расчётной длины колонн определяются по первой форме потери устойчивости:

$$\mu = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1 |N|}} \quad (9)$$

4 Результаты

4.1 Собственные частоты и формы колебаний

№	f, Гц	T, с	ω, рад/с	M _{eff,x} , %	M _{eff,y} , %	Характер формы
1	2,184	0,4578	13,72	85,16	0,00	Перекас рамы, 1-й тон
2	7,198	0,1389	45,23	12,37	0,00	Перекас рамы, 2-й тон
3	7,876	0,1270	49,49	1,26	0,00	Кососимметричный изгиб ригелей, ярусы в противофазе
4	8,710	0,1148	54,72	0,07	0,00	Кососимметричный изгиб ригелей, ярусы в фазе
5	9,077	0,1102	57,04	0,00	33,40	Симметричный изгиб ригелей перекрытия
6	9,738	0,1027	61,19	0,00	39,75	Симметричный изгиб ригелей покрытия
Сумма по шести формам				98,86	73,15	

Эффективные массы — в процентах от полной массы модели 44,76 т (часть массы приходится на закреплённые опорные узлы и в колебаниях не участвует).

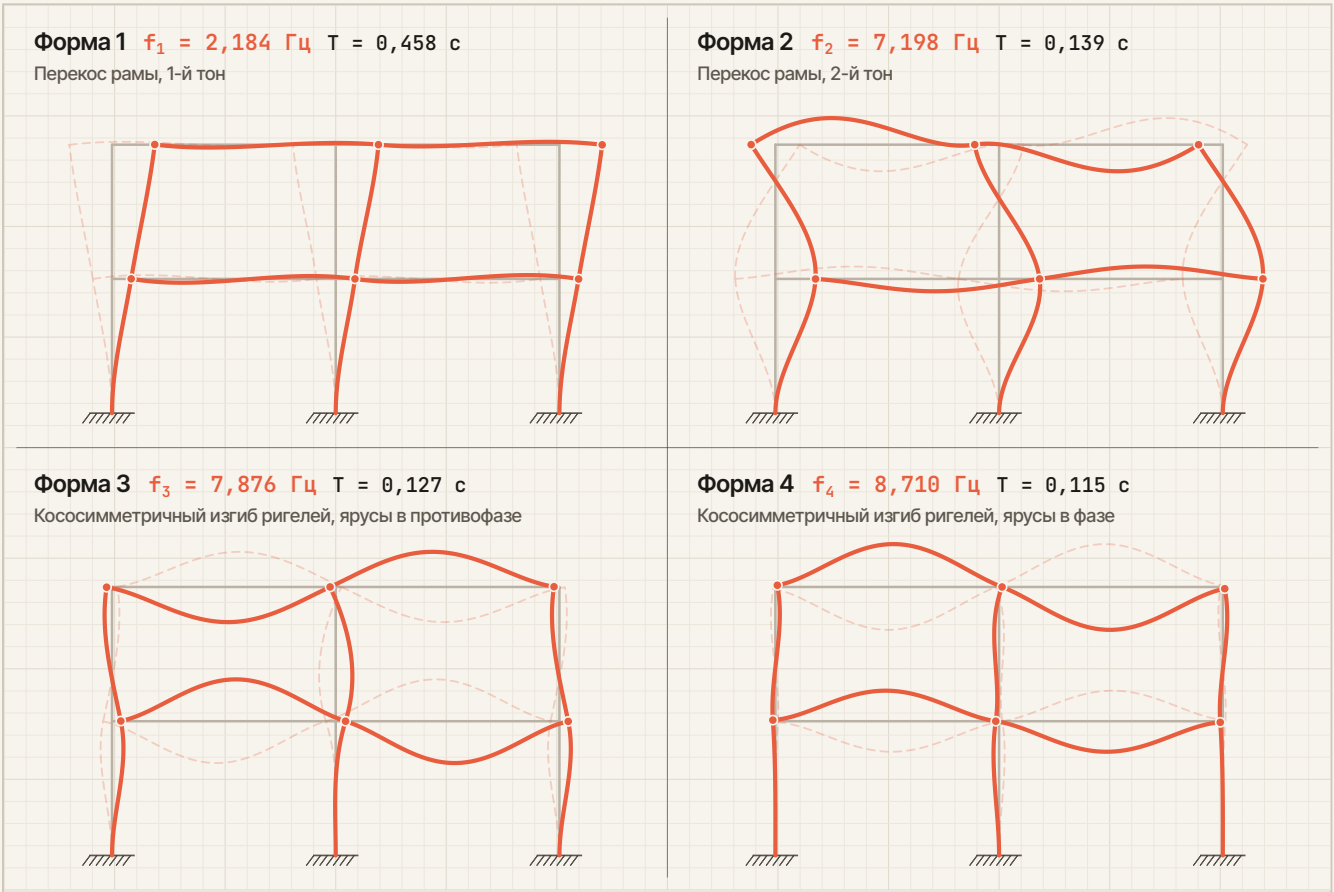


Рис. 2. Первые четыре формы собственных колебаний: сплошная линия — φ , пунктир — $-\varphi$; серым — недеформированная схема. Амплитуда условная.

Основной тон — поперечные колебания с перекасом обоих ярусов в одну сторону ($f_1 = 2,184$ Гц); он вовлекает 85,2 % массы по горизонтали. Вторая форма — перекас ярусов в противофазе (7,198 Гц). Формы 3–6 (7,88–9,74 Гц) связаны преимущественно с изгибом ригелей, нагруженных присоединённой массой перекрытий.

4.2 Устойчивость рамы

№	λ	Форма потери устойчивости	Ведущий элемент*
1	52,788	Общая потеря устойчивости со смещением узлов (перекос обоих ярусов)	K1-Б · 36 %
2	116,130	Потеря устойчивости с перекосом, ярусы смещаются в разные стороны	K2-Б · 32 %
3	178,793	Смешанная форма: выпучивание стойки K1-Б с изгибом примыкающих элементов и частичным перекосом рамы	K1-Б · 62 %

* Стержень с наибольшей долей работы продольных сил на перемещениях формы, $W_m = - \sum_{e \in m} \varphi_e^T \mathbf{k}_{G,e} \varphi_e$.

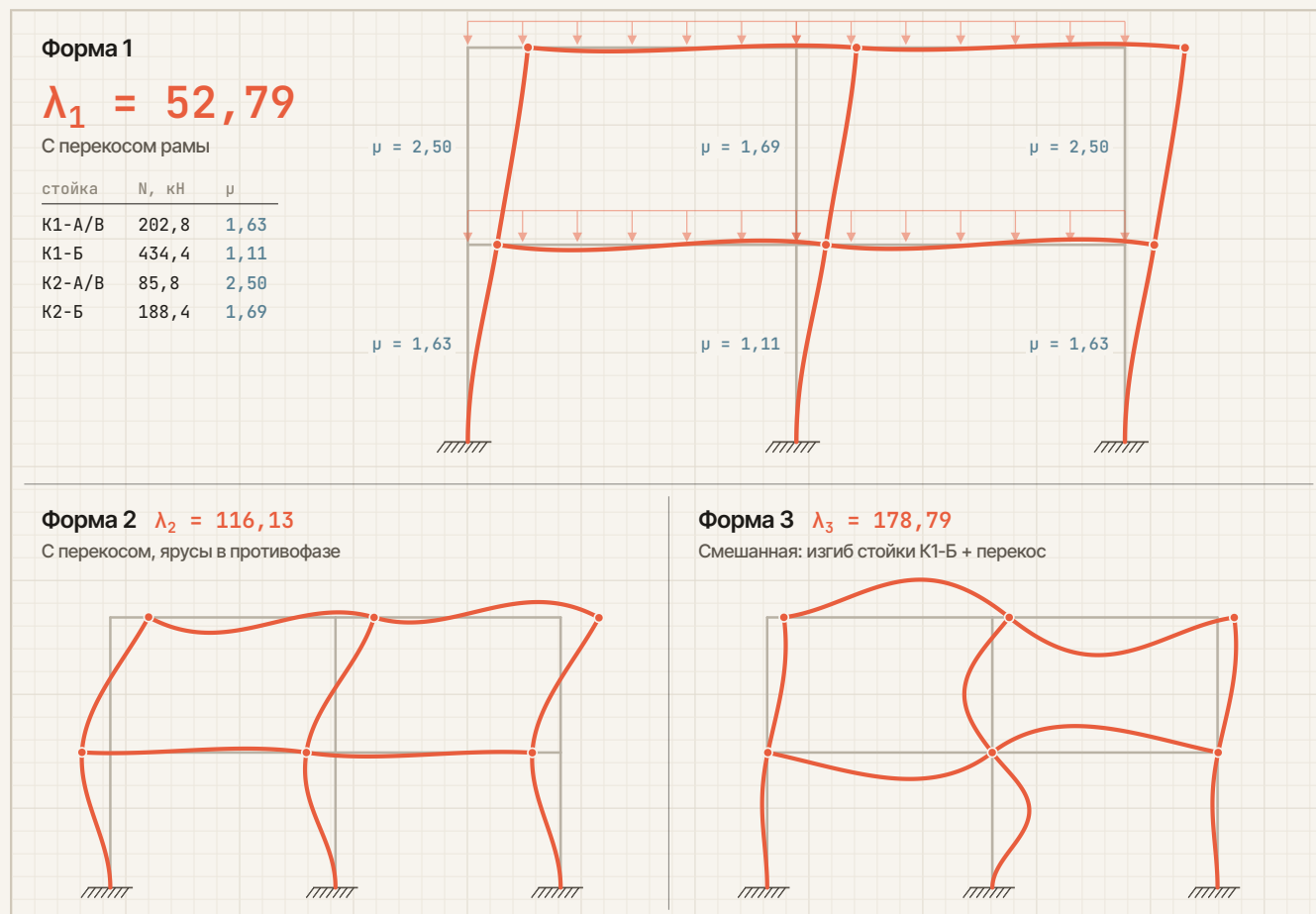


Рис. 3. Формы потери устойчивости при нагрузках $q_1 = 40$ кН/м и $q_2 = 30$ кН/м; μ — коэффициенты расчётной длины стоек по форме 1.

4.3 Продольные силы и расчётные длины колонн

Стойка	Ярус	N, кН	$N_{cr} = \lambda_1 N $, кН	μ
K1-A	1-й (0...+3,600)	-202,8	10 705	1,629
K1-Б	1-й (0...+3,600)	-434,4	22 931	1,113
K1-B	1-й (0...+3,600)	-202,8	10 705	1,629
K2-A	2-й (+3,600...+7,200)	-85,8	4529	2,504
K2-Б	2-й (+3,600...+7,200)	-188,4	9945	1,690
K2-B	2-й (+3,600...+7,200)	-85,8	4529	2,504

N — от расчётных нагрузок q (сжатие со знаком минус); $l = 3,6$ м, EI — для 30К1. Ригели нагружены продольными силами 19,7 кН (перекрытие) и -38,0 кН (покрытие); они также учтены в K_G .

5 Проверка

5.1 Сравнение с аналитическими решениями

Тестовые задачи считаются той же программой, теми же элементами и с той же сеткой (10 КЭ на стержень), что и основная модель. Критерий приемки — расхождение менее 0,5 %.

Задача	Аналитическое решение	Аналит.	МКЭ	ед.	Расхождение
Консоль, 1-я частота изгибных колебаний 30К1, $l = 3,6$ м, $m = \rho A$	$f_1 = \frac{1,8751^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$	28,6426	28,6426	Гц	+0,00009 %
Шарнирно опёртая балка, 1-я частота 35Б1, $l = 6$ м, $m = \rho A + 2000$ кг/м	$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$	4,3990	4,3990	Гц	+0,00067 %
Стойка Эйлера, шарнир–шарнир ($\mu = 1$) 30К1, $l = 3,6$ м	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	28 410,6	28 411,0	кН	+0,00135 %
Консольная стойка ($\mu = 2$) 30К1, $l = 3,6$ м	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	7102,7	7102,7	кН	+0,00008 %

5.2 Сходимость по сетке

КЭ / стерж.	ст. св.	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц	λ_1	макс. откл.
1	18	2,1854	7,2900	11,2018	53,210	42,23 %
2	48	2,1846	7,2138	7,9528	52,861	0,98 %
5	138	2,1844	7,1995	7,8783	52,790	0,03 %
10 *	288	2,1844	7,1982	7,8760	52,788	0,0049 %
20	588	2,1843	7,1980	7,8758	52,788	0,0009 %
40	1188	2,1843	7,1979	7,8758	52,788	эталон

* Сетка основной модели. Отклонение — от решения на сетке 40 КЭ на стержень. При одном элементе на стержень формы изгиба ригелей описываются грубо (f_3 завышена на 42 %); принятая сетка (10 КЭ) отличается от эталона не более чем на 0,0049 %.

6 Выводы

- Основной тон рамы — поперечные колебания с перекосом: $f_1 = 2,184$ Гц ($T_1 = 0,458$ с), 85,2 % массы по горизонтали. Шесть форм в диапазоне 2,18–9,74 Гц набирают 98,9 % массы по X и 73,2 % по Y.
- Первая форма потери устойчивости — общая, со смещением узлов: $\lambda_1 = 52,79$, т. е. рама теряет устойчивость при нагрузке в 52,8 раза больше расчётной. Коэффициенты расчётной длины колонн: нижний ярус $\mu = 1,11$ –1,63, верхний $\mu = 1,69$ –2,50.
- Модель верифицирована: расхождение с аналитическими решениями не превышает 0,00135 %, решение сходится по сетке, равновесие выполняется точно.

Исходные файлы: fem.py — библиотека КЭ (матрицы элементов, сборка, статика, собственные значения, устойчивость), gun.py — модель рамы, проверки и исследование сходимости. Все числа отчёта берутся из результатов одного детерминированного прогона.

Это концепт-расчёт для портфолио: файлы заказчиков не публикуются, поэтому пример построен с нуля. Те же задачи — собственные частоты, устойчивость, расчёт свайных фундаментов — для клиентов выполняются в **Abaqus**, **MATLAB** и **Mathcad** с отчётом в таком же формате.